RELAÇÕES ENTRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E CIRCUITOS ELÉTRICOS: UM ENFOQUE INTERDISCIPLINAR TRATADO EM LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR APLICADA

Joelma Iamac Nomura[1]

RESUMO:

Com o objetivo de apresentar respostas pertinentes à questão "como deve ser lecionada a Álgebra Linear em um curso de Engenharia Elétrica?", defendida na dissertação de Mestrado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, apresentamos neste artigo as principais contribuições de dois livros de Álgebra Linear no âmbito da pesquisa aplicada. Os livros apresentados buscam relacionar contextos reais de aplicações das diversas Engenharias e conteúdos específicos da Álgebra Linear por meio de exercícios. A análise seguiu os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) destacando-se a organização didática e matemática do objeto Sistemas de Equações Lineares quando tratado juntamente com disciplinas específicas das Engenharias. Assim, buscamos relacionar o tópico Sistemas de Equações Lineares com a disciplina Circuitos Elétricos e evidenciar que a interdisciplinaridade inerente às disciplinas específicas e matemáticas constitui-se em fator imprescindível para a formação do engenheiro que prime pelo desenvolvimento tecnológico e da pesquisa.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de Equações Lineares, Circuitos Elétricos, Interdisciplinaridade, Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT:

Aiming to provide relevant answers to the question "how should Linear Algebra be taught in an Electrical Engineering course? ", Master's thesis defended at the Program of Post Graduate Studies in Mathematics Education at PUC-SP, we present here the main contributions of two books of Linear Algebra in the context of applied research. The mentioned books seek to relate actual contexts of applications of the various Engineering Sciences and specific contents of Linear Algebra through exercises. The analysis followed the assumptions of Anthropological Theory of Didactics (ATD) highlighting the didactic and mathematic organization of the object Systems of Linear Equations when treated with specific disciplines of Engineering. Thus, we sought to relate the topic Systems of Linear Equations with the Electric Circuits course and to demonstrate that the interdisciplinarity inherent in mathematics and specific disciplines constitutes an essential factor for the engineer's education, which primes for the technological and researches development.

KEY WORDS: Systems of Linear Equations, Electric Circuits, Interdisciplinarity, Anthropological Theory of Didactics.

[1] Professora da Faculdade de Tecnologia FUNDETEC. Doutoranda em Educação Matemática pela PUC-SP. MBA em Administração de Projetos e Desenvolvimento Gerencial pelo Instituo Mauá de Tecnologia. Mestre em Educação Matemática pela PUC-SP e Graduada em Engenharia Elétrica pela PUC-SP (joelma.nomura@fatef.com.br).

Introdução

Este artigo objetiva apresentar as principais contribuições de dois livros didáticos de Álgebra Linear no aspecto da pesquisa aplicada. Tais contribuições são evidenciadas por meio de contextos práticos e reais das Engenharias e áreas afins da Matemática, enfatizando a aplicação do objeto matemático Sistemas de Equações Lineares em conteúdos específicos de disciplinas relacionadas ao curso de Engenharia Elétrica.

O trabalho motivado pela Dissertação de Mestrado defendida em setembro de 2008, apresentou a questão a ser investigada: *Por que e Como deve ser lecionada a disciplina de Álgebra Linear em uma graduação em Engenharia Elétrica?* Foi analisada pelo referencial teórico de *Yves Chevallard*, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), em que foram encontradas respostas pertinentes à questão *Como a Álgebra Linear pode ser lecionada* e que trouxeram, através de relatos de professores da área, a antecipação de conteúdos ministrados em disciplinas específicas das Engenharias. Tais conteúdos evidenciaram objetos matemáticos inerentes à disciplina Álgebra Linear direcionados ao ensino e aprendizagem de aplicações. Dentre eles, citamos: Circuitos Elétricos, Processos Estocásticos, Pesquisa Operacional, Sinais e Sistemas Lineares e Teoria da Codificação.

A interdisciplinaridade[2], refletida em objetos matemáticos específicos da Álgebra Linear e situações práticas das Engenharias, prima pela formação do engenheiro conceitual e generalista que busca na fundamentação teórica e básica a justificativa para o aprimoramento tecnológico de sua área.

Como afirma Donaldo E. Stokes, em sua obra o Quadrante de Pasteur – A Ciência Básica e a Inovação Tecnológica (2005), o objetivo da pesquisa aplicada é tornar o real possível, demonstrar a viabilidade do desenvolvimento científico ou de engenharia, explorando caminhos e métodos alternativos para a consecução de fins práticos. Prossegue, ressaltando que a relação entre ciência básica e aplicada deve propor uma visão reformulada da interação entre objetivos distintos.

Portanto, relacionar a pesquisa básica e aplicada, em uma forma dinâmica, que contemple a relevância de ambas as partes, contribui para o desenvolvimento, progresso tecnológico e visão abrangente do aluno quanto às disciplinas fundamentais que compõem a sua formação.

---

[2] Interdisciplinaridade: de acordo com Fazenda (2006), a interdisciplinaridade busca um conhecimento universal, ou seja, um conhecimento que não seja partido em campos ou áreas específicas.

Assim, como evidencia a dissertação defendida, o estudo do objeto matemático Sistemas de Equações Lineares, destacado no discurso dos professores entrevistados e intitulado *Análise da Organização Praxeológica do Objeto: Sistema de Equações Lineares – Uma Análise da Relação Institucional Existente* discute a noção de (tipo de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria relativas à organização didática e matemática deste saber, à luz da Teoria Antropológica do Didático.

Na raiz da noção de praxeologia, se encontram as noções de tarefa e tipo de tarefas que de acordo com Chevallard (1999) correspondem a construções institucionais. Chevallard (1999) acrescenta a noção de técnica como a maneira de realizar as tarefas, constituindo o bloco prático-técnico que se identificará genericamente com o que comumente se denomina um saber-fazer um determinado tipo de tarefa. Por tecnologia, entende-se como o discurso racional sobre a técnica, de modo a explicá-la e torná-la inteligível. Por sua vez, o discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explícitas, sendo plausível alguma justificativa. Passa-se, então, a um nível superior de justificação-explicação-produção que corresponde à teoria.

Buscando encontrar um equilíbrio entre teorias e aplicações, os livros discutidos, neste trabalho, contemplam um interessante repertório de exemplos de aplicações atuais com uma linguagem simples e didática, condizentes com o perfil do aluno em início de formação acadêmica e profissional.

QUADRO TEÓRICO E METODOLÓGICO

A Teoria Antropológica do Didático

Criada por Yves Chevallard, em 1992, a Teoria Antropológica do Didático focaliza o estudo das organizações praxeológicas[3] didáticas pensadas para o ensino e aprendizagem de organizações matemáticas. Esta teoria estuda o homem perante o saber matemático e mais especificamente perante situações matemáticas, tendo como base a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986).

---

[3] Organizações Praxeológicas: palavra formada por dois termos gregos que significam prática e razão. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão (ALMOULOUD, 2007, p. 117).

Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber*)* (ALMOULOUD, 2007, p. 111).

A citada teoria está inserida no campo antropológico, pois compreende relações entre a atividade do estudo em matemática no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (Chevallard, 1999, p.1).

No texto de Almouloud (2007, p. 111), sabemos que a Teoria das Situações Didáticas foi estudada com o objetivo de modelar o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos e que ela provoca, pelo menos, três rupturas de natureza epistemológica no campo da Educação Matemática:

1) Primeira: considera a Matemática como essência dos fenômenos didáticos;
2) Segunda: elabora uma ciência da educação desses fenômenos por meio de modelos teóricos submetidos a um esquema experimental;
3) Terceira: supõe que em relação à visão clássica a respeito do saber matemático, a teoria das situações traz a terceira ruptura epistemológica fundamental e supõe que

> [...] os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos e apreendidos por meio de atividades e problemas que podem ser resolvidos pela mobilização desses conhecimentos. A matemática é, antes de tudo, uma atividade que se desenvolve em situação que pode ser modelada por um jogo cujo oponente é um meio antagônico (ALMOULOUD, 2007, p.112).

Trata-se de uma atividade estruturada, formada pelas fases de ação, formulação e validação cujo protagonista é o aluno e as fases de devolução e institucionalização cujo papel principal é do professor.

Quando relacionada com a Teoria Antropológica do Didático, faz-se necessária a compreensão da tríade: objeto-pessoa-instituição.

De maneira privilegiada encontram-se os objetos. Estes se constituem o "material de base" da construção teórica considerada. Chevallard (1996) faz a comparação com a teoria dos conjuntos no universo matemático contemporâneo, sendo tudo, neste universo, conjunto. Já no universo a ser considerado do autor, tudo é objeto, assim como as pessoas e as instituições. O autor acrescenta: "Do ponto de vista da "semântica" da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela)" (CHEVALLARD, 1996, p.127).

Deve, portanto, existir uma relação entre o objeto e a pessoa ou o objeto e a instituição. Chevallard (1996) acrescenta uma outra noção, a de conhecimento. Conhecer um objeto, no sentido da teoria apresentada, é estabelecer uma relação da pessoa ou da instituição com esse objeto, tornando-o objeto de conhecimento.

Quando se relaciona ao termo instituição, afirma que o mesmo pode ser uma escola, uma sala de aula, um curso ou uma família. A cada instituição está associado um conjunto de objetos chamado de conjunto de objetos institucionais que são os objetos reconhecidos pela instituição, ou seja, para os quais existe uma relação institucional.

O teórico também estabelece as noções de (tipo de) tarefa T, (tipo de) técnica ţ, tecnologia θ e teoria Ö que permitem modelar as práticas sociais e, em particular, a atividade matemática.

Conforme explica Chevallard (1999), na raiz da noção de praxeologia, se encontram as noções de tarefa e de tipo de tarefas. Na maioria dos casos, uma tarefa (e o tipo de tarefas associado) se expressa por um verbo como *dividir um inteiro por outro*, integrar uma função. A noção de tipo de tarefas supõe um objeto relativamente preciso, como, por exemplo, calcular o valor de uma função em um ponto, calcular o valor (exato) de uma expressão numérica contendo uma raiz ou calcular o valor de uma expressão numérica contendo a letra x quando se atribui a x um valor determinado.

A seguir, Almouloud (2007) acrescenta que tarefas, tipo de tarefas são delimitadas por práticas institucionais.

> O problema de delimitar tarefas em uma prática institucional varia de acordo com o ponto de vista da instituição na qual se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso (ALMOULOUD, 2007, p.150).

Quanto à palavra técnica, Chevallard (1999) utiliza-a como uma “maneira de fazer” a tarefa, não correspondendo, necessariamente, a um procedimento estruturado e/ou algorítmico. Uma praxeologia relativa ao tipo de tarefas contém, pois, um princípio, uma técnica relativa ao tipo de tarefas. Contém, assim, um bloco prático-técnico que se identificará, genericamente, com o que comumente se denomina um saber-fazer um determinado tipo de tarefa.

Geralmente, existe um número limitado de técnicas reconhecidas em uma instituição, embora possa haver técnicas alternativas em outras instituições. Para realização de dada tarefa (T), as técnicas pertinentes (ţ), ou a maneira de fazer, podem ser rotineiras ou problemáticas. No início, a técnica é problemática, mas com o tempo passa a ser rotineira. Isso quer dizer que para produzir técnicas é necessário que haja uma tarefa problemática que estimule o desenvolvimento de novas técnicas, e que estas respondam às questões colocadas pela tarefa. Dessa forma, as técnicas são organizadas para que funcionem regularmente na instituição.

Para existir em uma determinada instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada, delimitada por condições e restrições ecológicas que justifiquem a existência das tarefas e técnicas nas instituições. Tal justificativa é chamada por Chevallard (1999) por tecnologia da técnica, que corresponde a um discurso lógico (*logos*) que lhe dá suporte. Da mesma forma, toda tecnologia precisa de uma justificativa, é a teoria da técnica. É um nível superior de justificativa-explicação-produção.

Assim, formaliza-se que uma praxeologia ou uma organização praxeológica está constituída de um bloco prático-técnico (T/ ţ), referente ao saber-fazer e por um bloco tecnológico (θ/Ö) referente ao saber.

De acordo com Chevallard (1999), a organização praxeológica associada a determinado saber matemático divide-se em organização praxeológica matemática e organização praxeológica didática ou, simplesmente, organização matemática e organização didática.

A organização matemática de um tema de estudo Φ, corresponde ao estudo da própria realidade matemática e a organização didática é a maneira como pode ser construída essa realidade matemática. Há, portanto, forte relação entre ambas as organizações.

Almouloud (2007) acrescenta que

> [...] quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se em primeiro lugar observar o objeto, depois descrevê-lo, analisá-lo e avaliá-lo para, finalmente, desenvolver atividades que têm por objetivo o ensino e aprendizagem desse objeto, categorizado da seguinte forma: - a realidade matemática (organização matemática – OM); - como se pode construir essa realidade (organização didática – OD) (ALMOULOUD, 2007, p.124)

A seguir, Almouloud (2007), considerando as idéias apresentadas por Chevallard, apresenta um conjunto de critérios explícitos para a realização de uma avaliação *a priori* das organizações matemática e didática feita por um professor. Assim, a análise dos tipos de tarefas segue os critérios:

> 1. Critério de identificação: verifica quais tipos de tarefas são apresentados de forma clara e bem identificados;
>
> 2. Critérios das razões de ser: verifica quais razões de ser dos tipos de tarefas são explicitadas ou, ao contrário, se esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;
>
> 3. Critério de pertinência: verifica quais tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas frequentemente encontradas, bem como se são pertinentes, tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos. (ALMOULOUD, 2007, p. 126).

A avaliação das técnicas apóia-se nos mesmos critérios, devendo buscar respostas para as seguintes questões:

> 1. As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou somente esboçadas?
> 2. São de fácil utilização?
> 3. São imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefas proposto?
> 4. São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto? (ALMOULOUD, 2007, p.126)

Também é apresentado um conjunto de indagações para avaliar as tecnologias ou a pertinência do bloco tecnológico-teórico. Seguem as questões:

> 1. Dado um enunciado, o problema de sua justificativa está somente colocado ou é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?
>
> 2 As formas de justificativas utilizadas são próximas daquelas matematicamente válidas?
>
> 3. Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado?
>
> 4. Os argumentos utilizados são cientificamente válidos?
>
> 5. O resultado tecnológico de uma determinada atividade pode ser explorado para produzir novas t*écnicas para resolver novas tarefas?* (ALMOULOUD, 2007, p.127).

Almouloud (2007) acrescenta que na TAD o objetivo de uma organização didática é estabelecer uma relação pessoal com a organização matemática ou modificar a relação existente, com o acréscimo de novas técnicas relacionadas ao tipo de tarefa proposto, ou pela ampliação do discurso teórico-tecnológico.

Ressalta a importância do professor nos diferentes momentos de estudo, desde seu primeiro encontro com a organização matemática, no estabelecimento de tarefas e na condução de um estudo exploratório de um tipo de tarefas, na organização da institucionalização e na realização do momento de avaliação.

Assim, à luz da Teoria Antropológica do Didático, buscamos articular as diversas noções expostas na pesquisa que compõem a tríade objeto-pessoa-instituição e que estejam em consonância com o objetivo desta investigação. Para tanto, os elementos que compõem a tríade farão parte da <u>análise da relação institucional existente</u>, dividida em análise matemática e didática do objeto matemático Sistema de Equações Lineares. Tal estudo estabeleceu as noções de (tipo de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria inerentes a este objeto matemático.

Procedimentos Metodológicos

De forma a atingir o objetivo da pesquisa, com respostas inerentes à questão, *como deve ser lecionada a Álgebra Linear em uma graduação de Engenharia Elétrica,* encontramos, em livros didáticos de Álgebra Linear, elementos pertinentes à análise da relação institucional existente do objeto matemático Sistemas de Equações Lineares. Tal análise seguiu os pressupostos da TAD em que são estabelecidas as noções de (tipo de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria direcionadas ao estudo de determinada atividade exposta nestes meios e está dividida em análise da organização matemática e didática do mesmo objeto. Para tanto, contemplamos os exercícios de aplicação nos livros *Álgebra Linear* de autoria de David Poole e *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações* de Bernard Kolman. As referências completas são apresentadas no Quadro 1.

A escolha de ambos os livros é refletida pelos exemplos de aplicações relacionadas às Engenharias, em que os autores propõem balancear práticas teóricas com aplicadas. Projetados para uso em uma disciplina introdutória de Álgebra Linear, os livros são destinados para um público potencialmente diverso e isso requer vários desafios e algumas questões a serem respondidas:

> Como balancear teorias e aplicações? A exposição deve ser rigorosa ou informal? A abordagem expositiva tradicional é incompatível com um aprendizado centrado no estudante? Qual o papel da tecnologia e das considerações computacionais relacionadas com ela? Pode a álgebra linear ser tornada “enxuta e viva”? (POOLE, 2004, p. xi).

Poole (2004, xi) afirma que não existe um único estilo de aprendizado e que um bom livro deve abordar uma variedade de maneiras para apresentar os conteúdos pertinentes, abrangendo os tópicos algebricamente, geometricamente, numericamente e verbalmente.

Escrito com uma abordagem compatível com a maioria das recomendações feitas pelo Grupo de Estudos Curriculares de Álgebra Linear, o autor propõe afastar-se da abstração em direção a uma disciplina mais concreta, destacando a extensão impressionante de problemas aos quais a Álgebra Linear pode ser aplicada. Contudo, não descarta as demonstrações elementares e acessíveis de teoremas. Abaixo, apresentamos a referência dos livros trabalhados.

Quadro 1: Livros analisados neste trabalho.

Nomeado nesta análise de	Referência do livro
L1	POOLE, D. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2004.
L2	KOLMAN, B. *et al*. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Em ambos os livros, a apresentação de exemplos de aplicação é discutida em seções que os autores denominam como Primeiro Contato com as Aplicações ou, simplesmente, Aplicações. Neste artigo, apresentaremos um único exemplo em que é explorado o conteúdo de Análise de Redes aplicado à disciplina Circuitos Elétricos no livro de Poole (2004) e outro sobre o mesmo assunto discutido no livro de Kolman (2006).

O quadro que segue relaciona o objeto matemático Sistema de Equações Lineares com os assuntos pertinentes à Engenharia Elétrica discutidos em ambos os livros.

Quadro 2: O objeto matemático Sistema de Equações Lineares e sua relação com disciplinas da Engenharia Elétrica.

Livro	Objeto Matemático	Assuntos pertinentes à Engenharia Elétrica	Algumas disciplinas relacionadas da Engenharia Elétrica
L1	Sistema de Equações Lineares	Análise de Redes	Circuitos Elétricos, Redes de Computadores
		Jogos Lineares Finitos	Circuitos Elétricos
		Cadeias de Markov	Processos Estocásticos
L2	Sistema de Equações Lineares	Introdução à Codificação	Teoria da Comunicação
		Análise de Redes	Circuitos Elétricos; Redes de Computadores.
		Cadeias de Markov	Processos Estocásticos
		Programação Linear	Pesquisa Operacional
		Introdução às Wavelets	Sinais e Sistemas Lineares

Análise da Organização Matemática do Objeto: Sistema de Equações Lineares

Nossa proposta é apresentar um exemplo de aplicação do objeto matemático Sistema de Equações Lineares, em Análise de Redes, discutido no livro de Poole (2004). Salientamos que esse assunto está diretamente relacionado à compreensão de conceitos subjacentes à disciplina Circuitos Elétricos. Em seguida, discutiremos um exemplo específico da disciplina de Circutos Elétricos em que são destacados seus conceitos básicos e leis fundamentais, constituintes da análise do discurso teórico-tecnológico.

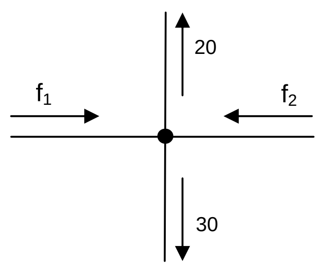
O exemplo 1, proposto por Poole (2004, p. 100) retrata o conceito inicial de Análise de Redes que, posteriormente, será trabalhada como base teórica em exemplos aplicados na disciplina Circuitos Elétricos. O exemplo 2, proposto por Kolman (2006, p. 134) introduz as leis básicas e conceitos fundamentais para análise de circuitos elétricos.

Exemplo 1: Análise de Redes

Redes aparecem em várias situações práticas de transporte, redes de comunicação e redes econômicas, para mencionar algumas. São particularmente interessantes os possíveis fluxos através de redes. Por exemplo, veículos fluem por meio de redes de estradas, informação flui através de uma rede de dados, bens e serviços fluem através de uma rede econômica.

Para nós, uma **rede** consiste em um número finito de **nós** (também chamados **junções** ou **vértices**) conectados por uma série de segmentos dirigidos, conhecidos como **ramos** ou **arcos.** Cada ramo é rotulado com um **fluxo** que representa a quantidade de alguma mercadoria que pode fluir ao longo ou através daquele ramo na direção indicada (por exemplo: carros viajando ao longo de uma rede de ruas de mão única). A regra fundamental que governa o fluxo através da rede é a **conservação de fluxo**: em cada nó, o fluxo de entrada é igual ao fluxo de saída.

Figura 1: Fluxo de um nó: $f_1 + f_2 = 50$



A Figura 1 mostra uma parte de uma rede, com dois ramos entrando em um nó e dois saindo. A regra de conservação do fluxo implica que o fluxo de entrada, $f_1 + f_2$ unidades, deve coincidir com o fluxo total de saída, 20 + 30 unidades. Assim, temos a equação linear $f_1 + f_2 = 50$ correspondente a esse nó.

Podemos analisar o fluxo através de uma rede inteira, construindo as equações e resolvendo o sistema de equações lineares resultante.

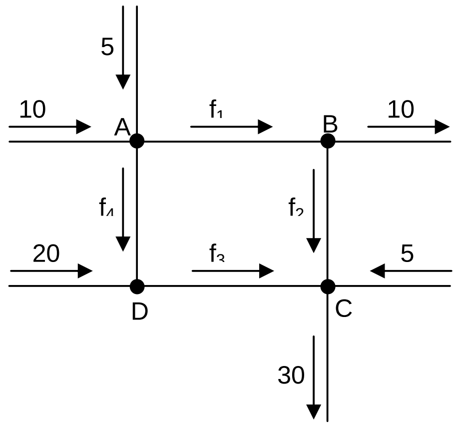
Tarefa

É expressa por um verbo e supõe um objeto relativamente preciso e delimitado por práticas institucionais. Nesse caso, a prática institucional é estabelecida pela visão individual dos autores quanto à apresentação do tópico Sistemas de Equações Lineares nos livros.

Tarefa – L1

Descrever os possíveis fluxos através da rede de encanamento de água em que o fluxo é medido em litros por minuto. A resolução do sistema que descreve os possíveis fluxos é realizada pelo Método de Gauss-Jordan.

Figura 2: Fluxo através da rede de encanamento de água



Técnica

Corresponde à “maneira de fazer” a tarefa, podendo estimular o desenvolvimento de novas técnicas.

Técnica – L1

Escrevemos as equações que representam a conservação do fluxo de cada nó. Depois, reescrevemos cada equação com as variáveis do lado esquerdo e a constante do lado direito, obtendo um sistema linear na forma padrão.

$$\begin{array}{l} Nó\_A: 15 = f_1 + f_4 \\ Nó\_B: f_1 = f_2 + 10 \\ Nó\_C: f_2 + f_3 + 5 = 30 \\ Nó\_D: f_4 + 20 = f_3 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} f_1 + f_4 = 15 \\ f_1 - f_2 = 10 \\ f_2 + f_3 = 25 \\ f_3 - f_4 = 20 \end{cases}$$

Usando o método de eliminação de Gauss-Jordan, reduzimos a matriz completa:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vemos que há mais de uma variável livre, f_4, e, portanto, temos infinitas soluções. Fazendo f_4 = t e expressando as variáveis dependentes em termos de f_4, obtemos:

$$\begin{aligned} f_1 &= 15 - t \\ f_2 &= 5 - t \\ f_3 &= 20 + t \\ f_4 &= t \end{aligned}$$

Essas equações descrevem todos os possíveis fluxos e nos permitem analisar a rede. Por exemplo, vemos que, se controlarmos o fluxo no ramo A de modo que t = 5 L/min, os outros fluxos serão $f_1 = 10$, $f_2 = 0$ e $f_3 = 25$.

Podemos fazer ainda melhor: encontrar os fluxos máximos e mínimos de cada ramo. Os fluxos não devem ser negativos. Examinando a primeira e a segunda equações, vemos que $t \le 15$ (caso contrário, f_1 seria negativo) e $t \le 5$ (caso contrário, f_2 seria negativo). A segunda dessas desigualdades é mais restritiva que a primeira, por isso devemos usá-la. A terceira equação não traz novas restrições para nosso parâmetro *t*, então deduzimos que $0 \le t \le 5$. Combinando esse resultado com as quatro equações, vemos que:

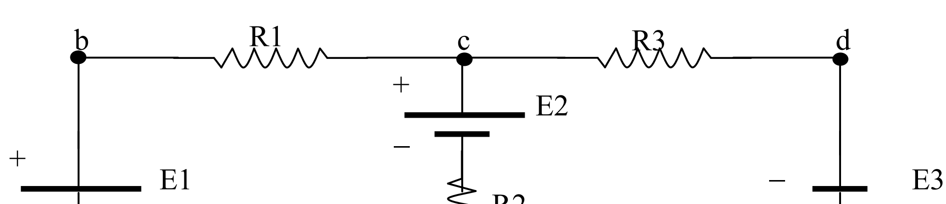
$$\begin{aligned} 10 \le\ & f_1 \le 15 \\ 0 \le\ & f_2 \le 5 \\ 20 \le\ & f_3 \le 25 \\ 0 \le\ & f_4 \le 5 \end{aligned}$$

Com isso, temos uma descrição completa dos possíveis fluxos através dessa rede.

Exemplo 2: Circuitos Elétricos

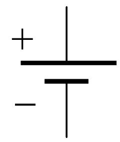
Objetivo: Introdução às leis básicas de análise de circuitos elétricos.

Figura 3: Circuito elétrico simples com três baterias e quatro resistores conectados por fios



Conceitos:

a) Baterias: Fonte de corrente direta (ou tensão) no circuito.

Representação: 

b) Resistores: É um dispositivo, como uma lâmpada, que reduz a corrente em um circuito convertendo energia elétrica em energia térmica.

Representação: 

c) Fios: É um condutor que permite o fluxo livre de corrente elétrica.

Representação:

Um circuito elétrico simples é uma conexão fechada de resistores, baterias e fios.

A Figura 3 apresenta um circuito elétrico simples que compreende três baterias, quatro resistores conectados por fios.

As quantidades físicas utilizadas, quando se discute um circuito elétrico, são corrente, resistência e diferença de potencial elétrico que atravessa uma bateria.

Representações:

- Corrente: é representada por I e medida em Ampéres (A);
- Resistência: é representada por R e medida em Ohms (Ω);
- Diferença de potencial elétrico é representada por E e medida em Volts (V).

A relação entre essas medidas é dada por:

$V = \pm I \,.\, R$ (Lei de Ohm)

Assume-se a diferença de potencial elétrico de uma bateria como positiva quando medida de um terminal negativo (-) para um terminal positivo (+) e como negativa quando medida de um terminal positivo (+) para um terminal negativo (-).

Assim, a diferença de potencial que passa por um resistor depende da corrente que passa pelo resistor e sua resistência (Lei de Ohm).

Todos os circuitos consistem em ciclos de tensão e nós de corrente:

- Ciclos de tensão: é uma conexão fechada dentro do circuito.

Exemplo:
$$a \to b \to c \to f \to a$$
$$c \to d \to e \to f \to c$$
$$e$$
$$a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$$

- Nós de corrente: é um ponto onde três ou mais segmentos de fio se encontram.

Exemplo: c, f.

As leis da física que governam o fluxo de corrente em um circuito elétrico são a de conservação de energia e a de conservação de carga:

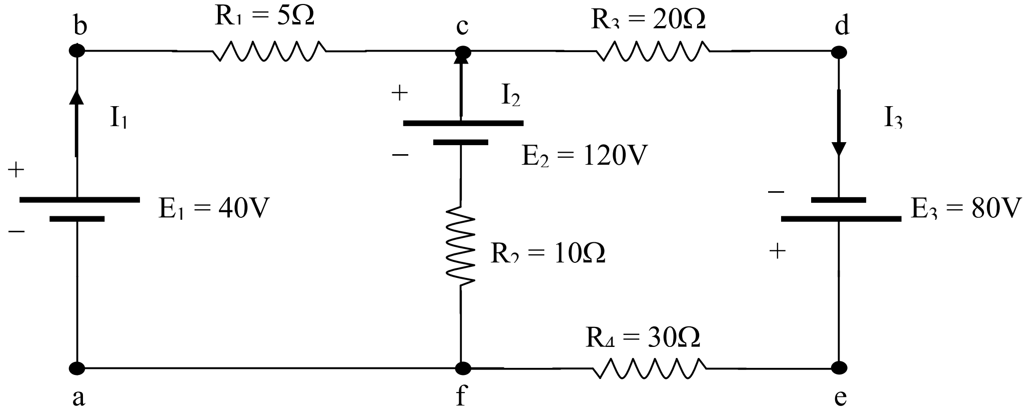
- A *conservação de energia* está contida na **lei de Kirchhoff das tensões**: a diferença de potencial total medida em qualquer ciclo é nula.
- A *conservação de carga* está contida na **lei de Kirchhoff das correntes**: em qualquer nó, a corrente total que chega ao nó é igual à corrente total que deixa o nó. Isso garante que a carga elétrica não se acumule ou desapareça em um nó, de
- modo que o fluxo de corrente através do nó é estacionário.

A Figura 4 apresenta o circuito com as baterias indicando seu potencial elétrico, medido do terminal negativo para o positivo, e os resistores com as resistências indicadas. O exemplo é discutido por Kolman (2006, p.134).

Tarefa – L2

Fgura 4: Circuito elétrico com baterias indicando seu potencial elétrico

Determinar as correntes que atravessam cada segmento do circuito.



Técnica – L2

Montar o sistema utilizando as Leis de Kirchhoff das Correntes e Tensões. O sistema é resolvido pelo Método de Gauss.

Devemos usar:

(1) Lei de Kirchhoff das Correntes:

Aribuímos I_1 ao segmento $f \to a \to b \to c$, I_2 ao segmento $f \to c$, e I_3 ao segmento $c \to d \to e \to f$. Além disso, atribuímos arbitrariamente direções a essas correntes como indicadas pelas flechas na figura. Se a direção atribuída for correta, o valor calculado da corrente será positivo; se estiver incorreta, o valor calculado da corrente será negativo. Esse último resultado indica que a direção real da corrente é oposta à atribuída. Utilizando a lei de Kirchhoff das correntes (a soma das correntes que chegam ao nó = a soma das correntes que saem do nó) nos pontos *c* e *f*, temos:

No nó C: $I_1 + I_2 = I_3$

(01)

No nó F: $I_3 = I_1 + I_2$

As duas equações contêm a mesma informação, portanto apenas uma delas é necessária.

(2) Lei de Kirchhoff das Tensões:

A diferença de potencial medida em qualquer ciclo é nula.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões no ciclo fechado: $a \to b \to c \to f \to a$, resulta em:

$$\begin{aligned}
&(+E_1) + (-R_1.I_1) + (-E_2) + (R_2.I_2) = 0 \\
&(+40V) + (-5.I_1) + (-120V) + (10.I_2) = 0 \\
&40 - 5.I_1 - 120 + 10.I_2 = 0 \\
&-5.I_1 + 10.I_2 - 80 = 0 \\
&-I_1 + 2.I_2 - 16 = 0 \\
&I_1 - 2I_2 = -16
\end{aligned} \qquad (02)$$

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões no ciclo fechado $c \to d \to e \to f$, temos:

$$(-R_3.I_3)+(+E_3)+(-R_4.I_3)+(-R_2.I_2)+(+E_2)=0$$
$$(-20.I_3)+(80)+(-30.I_3)+(-10.I_2)+(120)=0$$
$$-20.I_3+80-30.I_3-10.I_2+120=0$$
$$-50.I_3-10.I_2+200=0 \qquad (03)$$
$$-5.I_3-I_2+20=0$$
$$-I_2-5.I_3=-20$$
$$I_2+5.I_3=20$$

Aplicando-se a Lei de Kirchhoff das Tensões no ciclo fechado $a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$, temos:

$$(+E_1)+(-R_1.I_1)+(-R_3.I_3)+(+E_3)+(-R_4.I_3)=0$$
$$40+(-5.I_1)+(-20.I_3)+80+(-30.I_3)=0$$
$$40-5.I_1-20.I_3+80-30.I_3=0$$
$$-5.I_1-50.I_3+120=0 \qquad (04)$$
$$-5.I_1-50.I_3+120$$
$$-5.I_1-50.I_3=-120$$
$$I_1+10.I_3=24$$

Percebemos que a equação (04) é uma combinação linear da $Equação(02)+2.Equação(03)$.

$$I1-2.I2+2I2+10I3=-16+2.20$$
$$I1+10.I3=24$$

Portanto, a equação (04) é redundante e poderá ser omitida.

Em geral, um ciclo externo maior como $a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$ não fornece informações novas se todos os seus ciclos internos, como $a \to b \to c \to f \to a$ e $c \to d \to e \to f \to c$, já tiverem sido incluídos.

As Equações (01), (02) e (03) resultam em um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

em que a matriz dos coeficientes é: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e a matriz completa é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema pelo Método de Gauss, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 3 & -1 & 16 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3.L_2 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 16 & 44 \end{array}\right]$$

Resultamos no sistema:

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$I_2 + 5.I_3 = 20$

$16.I_3 = 44$

Portanto: $I_1 = -3{,}5$ A; $I_2 = 6{,}25$ A e $I_3 = 2{,}75$ A.

O valor negativo de I_1 indica que sua direção verdadeira é oposta à atribuída na figura.

Em geral, para um circuito elétrico composto por baterias, resistores e fios e com n valores distintos de corrente, as Leis de Kirchhoff das tensões e corrente sempre resultarão em n equações lineares com uma única solução.

Discurso Teórico-Tecnológico das Tarefas e Técnicas de ambos os Exemplos

Nos exemplos apresentados por Poole (2004) e Kolman (2006), evidencia-se a aplicação do objeto matemático Sistema de Equações Lineares como ferramenta para a resolução de problemas relativos às disciplinas da graduação de Engenharia Elétrica. No primeiro exemplo, relacionamos o objeto matemático Sistema de Equações Lineares com o assunto Análise de Redes inerente à disciplina Circuitos Elétricos. Em um segundo momento, discutimos um exemplo desenvolvido para a disciplina específica de Circuitos Elétricos. A escolha por esta disciplina foi motivada não apenas pelos livros analisados como também pelos discursos dos professores entrevistados na pesquisa, sendo considerada como disciplina básica e fundamental para a graduação.

Como apresenta Chevallard (1999), a organização matemática de um tema de estudo Φ, corresponde ao estudo da própria realidade matemática. Portanto, entendemos a realidade matemática do objeto Sistema de Equação Linear como a extensão de suas técnicas de resolução, soluções dos sistemas e propriedades às aplicações inerentes às diversas disciplinas.

Dentre as bases teóricas apresentadas para análise dos Circuitos Elétricos evidenciamos a Tensão Elétrica[4], Intensidade de Corrente[5], Resistência Elétrica[6], Lei de Ohm[7], Leis de Kirchhoff das Tensões e Correntes[8].

De acordo com o mesmo autor, quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se primeiro observá-lo e depois descrevê-lo, analisá-lo e avaliá-lo para, finalmente, desenvolvermos atividades que têm por objetivo o ensino e a aprendizagem desse objeto.

Assim, a discussão de exercícios de aplicação norteará a apresentação do objeto matemático Sistema de Equações Lineares dirigido às disciplinas desta graduação, e

---

[4] *Quando separadas, as cargas elétricas de sinais opostos tendem a se unir na primeira oportunidade. Isso acontece porque, com a separação, cada carga elétrica adquire energia potencial capaz de movimentá-la assim que houver oportunidade; basta ligá-las com um condutor para movimentá-las.*

A essa situação de tensão de cargas – o fato de elas tenderem a se juntar – chamamos tensão elétrica ou diferença de potencial (ddp). Essa grandeza é medida em volts (V) e pode ser representada numa equação pela letra U (BARROS, C; PAULINO, W., p. 168).

[5] *Para medirmos a corrente elétrica num dado intervalo de tempo (Δt), contamos a quantidade de cargas elétricas (Δq) que atravessa uma seção transversal de um fio condutor. A relação entre as quantidades Δq e Δt é chamada de intensidade da corrente elétrica (i). Portanto:* $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ *(BARROS, C; PAULINO, W., p. 169).*

[6] *É definida como a razão entre a tensão U nos terminais de um condutor e a intensidade da corrente elétrica i que o atravessa. Assim:* $R = \frac{U}{i}$ *(BARROS, C; PAULINO, W., p. 170).*

[7] *Força elétrica = resistência x corrente ou E = R x I (POOLE, p. 120).*

[8] *Lei da Corrente (nós) – A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele.*

Lei da Voltagem (circuitos) – A soma das quedas de voltagem ao longo de qualquer circuito é igual à voltagem total em torno do circuito (fornecida pelas baterias) (POOLE, p. 120).

incentivará a busca por relações interdisciplinares que compõem o currículo para formação do aluno.

Análise da Organização Didática do Objeto: Sistema de Equações Lineares

Para tal análise, propomos algumas questões:

1) As tarefas estão bem encadeadas?

2) O que podemos dizer sobre a diversidade das tarefas?

3) O discurso teórico-tecnológico encontrado no livro é suficiente para um curso de Engenharia Elétrica?

4) O discurso teórico-tecnológico no livro é compatível com as falas sobre formação do engenheiro apresentadas pelos professores entrevistados?

Conforme exposto por Chevallard (1999), a maneira como será realizado o primeiro encontro com o objeto matemático Sistema de Equações Lineares é um aspecto didático que merece apreciação.

Kolman (2006) e Poole (2004) enfatizam o aspecto dinâmico entre as disciplinas de diversas graduações, dentre elas a Engenharia Elétrica com a Álgebra Linear. Eles reforçam que o material foi elaborado para compor uma disciplina voltada para alunos no primeiro ou segundo ano de cursos universitários, por isso, a relação com conteúdos específicos ainda elementares e que estejam ao alcance de alunos em fase inicial de formação.

De acordo com Kolman (2006), a experiência mostra que, para alunos do segundo ano, as idéias abstratas devem ser introduzidas gradualmente e ter bases sólidas.

Na apresentação conceitual, os autores pretenderam apresentar respostas a alguns dos desafios: A abordagem expositiva tradicional é incompatível com um aprendizado centrado no estudante? Pode a Álgebra Linear se tornar "enxuta e viva"[9]? Dessa forma, os autores tentaram estar em consonância com a temática "enxuta e viva", incluindo demonstrações elementares e limitando o número de teoremas no texto, resultando em obras autocontidas, como expõem os próprios autores.

Os exemplos e exercícios são agrupados em três classes. A primeira contém exemplos rotineiros. A segunda, exercícios teóricos que incluem atividades que preenchem as lacunas de algumas das demonstrações e ampliam o conteúdo do texto. Alguns deles pedem uma

[9] Esta expressão é identificada como "movimento de reforma" do cálculo, movimento este originado com a obra *Toward a lean and lively calculus*, de R. G. Douglas (Washington, DC: Mathematical Association of America, 1986). O mesmo sentimento é igualmente aplicável á Álgebra Linear (Poole, 2004, p. xi)

solução discursiva. A terceira classe abrange exercícios para serem resolvidos com o *Matlab* ou outro pacote de *software* apropriado. Já as aplicações são estendidas a diversos domínios, dentre eles às Engenharias, à Ciência da Computação, à Economia ou à Biologia. A quantidade delas mostra a extensão de problemas aos quais a Álgebra Linear pode ser aplicada, estando em consonância com assuntos atuais abordados na Engenharia Elétrica como Séries *Wavelets* ou a Teoria da Codificação.

Portanto, abrangem vários aspectos discutidos nos discursos dos professores que fizeram parte das entrevistas. Salientamos que os entrevistados abordaram aspectos relacionados à apresentação do conteúdo de Álgebra Linear frente às aplicações da área, à sequência de tarefas gradativas e evolutivas conforme o desenvolvimento dos alunos, à escolha de livros didáticos que contemplem uma visão interdisciplinar e à formação do engenheiro que prime por aspectos conceituais, teóricos e aplicados.

Considerações Finais

A análise do objeto matemático Sistema de Equações Lineares à luz da Teoria Antropológica do Didático foi desenvolvida através da identificação da organização praxeológica formada pelo conjunto de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que expõem o objeto matemático.

Nos exemplos apresentados por Poole (2004) e Kolman (2006), o objeto matemático Sistema de Equações Lineares sempre esteve vinculado à idéia de ferramenta para a resolução de problemas inerentes às disciplinas da Engenharia Elétrica. Porém, para uma análise minuciosa deste objeto como ferramenta é necessário que compreendamos a sua realidade, como a extensão de suas técnicas de resoluções, suas possíveis soluções e propriedades.

Com base na análise das informações obtidas nesta etapa da pesquisa, em que expusemos como um curso de Álgebra Linear pode ser redirecionado através de exercícios aplicados, acreditamos na viabilidade de uma reformulação conforme expõem os próprios assuntos pertinentes às demais áreas do conhecimento.

Sabemos que estamos longe de alcançar mudanças significativas nesse sentido, mas, sem dúvida, um passo já foi dado.

Como sugestão para estudo futuro, propomos verificar na prática como uma aula de Álgebra Linear em uma graduação de Engenharia Elétrica poderá ser estruturada com base nos exercícios de aplicação expostos em livros como os apresentados em nossa investigação. Mas, como reagiriam os professores de Matemática e os alunos frente a esta situação?

São questões inquietantes e que poderão contribuir para o aprimoramento da pesquisa básica e aplicada frente à constituição da área de Educação Matemática.

Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Paraná: UFPR, 2007, p. 111–128.

BARROS, C., PAULINO, W. **Ciências - Física e Química**. São Paulo: Ática, 2007

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico**. Recherches em Didactique des Mathématiques, Vol. 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade na formação de professores – da teoria à prática.** Ulbra, 2006.

KOLMAN, B. et al. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson, 2004.

STOKES, D. E. **O Quadrante de Pasteur – A Ciência Básica e a Inovação Tecnológica.** Campinas: Unicamp, 2005.